

## Propiedades logarítmicas, soluciones

Mr. Neeman. 11A, 27 de octubre, 2011

#1. Expresa cada una de las siguientes en términos de  $\log x$ ,  $\log y$ ,  $\log z$ , y constantes.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \log_3 \frac{x^3}{9} \\ &= \log_3(x^3) - \log_3 9 \\ &= 3 \log_3 x - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad & \log_2(\sqrt[4]{z}xy^2) \\ &= \log_2 \sqrt[4]{z} + \log_2 x + \log_2(y^2) \\ &= \frac{1}{4} \log_2 z + \log_2 x + 2 \log_2 y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad & \ln \frac{e^2 x^3}{y} \\ &= \ln(e^2) + \ln(x^3) - \ln y \\ &= 2 + 3 \ln x - \ln y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(d)} \quad & \log_{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[3]{x}}{4y^3} \\ &= \log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{x} - \log_{\frac{1}{2}} 4 - \log_{\frac{1}{2}}(y^3) \\ &= \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{2}} x + 2 - 3 \log_{\frac{1}{2}} y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(e)} \quad & \log_{10}(xy^{-2}) \\ &= \log_{10} x + \log_{10}(y^{-2}) \\ &= \log_{10} x - 2 \log_{10} y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(f)} \quad & \log_5 \left( \left( \frac{y}{x^3} \right)^{-2} \right) \\ &= \log_5 \left( \frac{x^6}{y^2} \right) \\ &= \log_5(x^6) - \log_5(y^2) = 6 \log_5 x - 2 \log_5 y \end{aligned}$$

#2. Expresa cada uno como un sólo logaritmo, sin coeficiente en su frente.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \frac{\log_2 3x}{2} - 2 \log_2 y \\ &= \log_2 \sqrt{3x} - \log_2(y^2) \\ &= \log_2 \left( \frac{\sqrt{3x}}{y^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad & \log_{\frac{1}{3}}(y^2) - 3 \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{y} \\ &= \log_{\frac{1}{3}}(y^2) - \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{y^3} \\ &= \log_{\frac{1}{3}} \left( \frac{y^2}{\sqrt{y^3}} \right) \\ &= \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad & 2 \log_3(xy^2) + \log_3 \frac{x}{y^3} \\ &= \log_3(x^2 y^4) + \log_3 \frac{x}{y^3} \\ &= \log_3 \frac{x^2 y^4 x}{y^3} \\ &= \log_3(x^3 y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{(d)} \quad -\frac{\log_4 \sqrt{y}}{2} + \log_4 y - 2 \log_4 x \\
& \log_4(\sqrt{y}^{-\frac{1}{2}}) + \log_4 y - \log_4(x^2) \\
& = \log_4 \left( \frac{\sqrt{y}^{-\frac{1}{2}} y}{x^2} \right) \\
& = \log_4 \left( \frac{y}{y^{\frac{1}{4}} x^2} \right) \\
& = \log_4 \left( \frac{y^{\frac{3}{4}}}{x^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{(e)} \quad 3 \ln(x^2) - \frac{\ln((xy^2)^4)}{2} \\
& = \ln(x^6) - \ln((xy^2)^2) \\
& = \ln \frac{x^6}{x^2 y^4} \\
& = \ln \frac{x^4}{y^4}
\end{aligned}$$

#3. Simplifique cada una de las siguientes:

$$\begin{aligned}
& \text{(a)} \quad \log_3 1 + \log_3(x^3 - 1) - \log_3(x + 1) \\
& = \log_3(x^3 - 1) - \log_3(x + 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{(b)} \quad \frac{\log_2(x^2)}{\log_2(y^4)} \\
& = \frac{2 \log_2 x}{4 \log_2 y} \\
& = \frac{\log_2 x}{2 \log_2 y}
\end{aligned}$$

Si quiere, puede usar cambio de base:

$$= \frac{1}{2} \log_y x$$

Pero no es objetivamente más simple así, así que lo puede dejar como estuvo en el paso anterior.

$$\begin{aligned}
& \text{(c)} \quad \ln(\sqrt{x} + 4) + \ln(\sqrt{x} - 4) \\
& = \ln((\sqrt{x} + 4)(\sqrt{x} - 4)) \\
& = \ln(x - 16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{(d)} \quad \ln(e^3 xy) - \ln(e^2 y^2) \\
& = \ln \frac{e^3 xy}{e^2 y^2} \\
& = \ln \frac{ex}{y} \\
& = \ln e + \ln \frac{x}{y} \\
& = 1 + \ln \frac{x}{y}
\end{aligned}$$

#4. (a) Expresar  $\log_9 x$  en términos de  $\log_3 x$ .

$$\begin{aligned}
\log_9 x &= \frac{\log_3 x}{\log_3 9} \\
&= \frac{\log_3 x}{\log_3(3^2)} \\
&= \frac{\log_3 x}{2}
\end{aligned}$$

(b) Expresar  $\log_{\frac{1}{5}} 7$  en términos de logaritmo base 5.

$$\begin{aligned}
\log_{\frac{1}{5}} 7 &= \frac{\log_5 7}{\log_{\frac{1}{5}} 5} \\
&= \frac{\log_5 7}{\log_{\frac{1}{5}} \left( \frac{1}{5} \right)^{-1}} \\
&= \frac{\log_5 7}{-1} \\
&= -\log_5 7
\end{aligned}$$

(c) Expresar  $\log_3(x^4) - \log_9(y^2)$  como un sólo logaritmo.

Podemos cambiar el de base 3 a base 9, o el de base 9 a base 3. Cambiemos el de base 3 a base 9:

$$\begin{aligned}\log_3(x^4) &= \frac{\log_9(x^4)}{\log_9 3} \\ &= \frac{\log_9(x^4)}{\log_9(9^{\frac{1}{2}})} \\ &= \frac{\log_9(x^4)}{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \log_9(x^4)\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\log_3(x^4) - \log_9(y^2) &= 2 \log_9(x^4) - \log_9(y^2) \\ &= \log_9(x^8) - \log_9(y^2) \\ &= \log_9 \frac{x^8}{y^2}\end{aligned}$$

Si lo hubieramos hecho a base 3, nos hubiera dado:

$$\log_3 \frac{x^4}{y}$$

(d) Simplifique  $\frac{\log_4 20}{\log_2 20}$ .

Hay que escoger uno y cambiarlo a la otra base. Cambiemos la base 4 a base 2:

$$\log_4 20 = \frac{\log_2 20}{\log_2 4} = \frac{\log_2 20}{2}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\frac{\log_4 20}{\log_2 20} &= \frac{\frac{\log_2 20}{2}}{\log_2 20} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$