

Probabilidades (continuado)

Mr. Neeman. 11A, 1 de agosto, 2011

Probabilidades condicionales

En el ejercicio pasado llamado “la trampa de género” la pregunta era: *Cuál es la probabilidad de que ambos sean hombres, dado que al menos uno lo es?* Aquí se debe notar que hay dos partes importantes:

A. La posibilidad de la cuál se debe calcular la probabilidad (que ambos sean hombres).

B. La condición que se asume como dada (que al menos uno es hombre).

Probabilidades de este tipo, en las que se asume una condición se llaman probabilidades condicionales.

Si A y B son dos posibilidades, entonces se define:

La probabilidad de A dado B es $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

donde $P(B)$ es la probabilidad de B y $P(A \cap B)$ es la probabilidad de que ambos A y B sucedan.

Para resolver el ejercicio del género, notamos que hay cuatro casos:

MM: las dos son mujeres.

MH: la mayor es mujer y el menor hombre.

HM: el mayor es hombre y la menor mujer.

HH: los dos son hombres.

Cada una de éstas tiene probabilidad $\frac{1}{4}$. Para ver esto, se puede notar que la probabilidad de cada uno es $\frac{1}{2}$ de ser hombre y $\frac{1}{2}$ de ser mujer, y así calcular estas probabilidades con la regla del producto. Ahora, la pregunta es de la probabilidad de que ambos sean hombres (HH) dado que al menos uno lo es. Pero cómo denotamos que al menos uno es hombre? Ese caso incluye a MH, HM y HH, pero no MM. Entonces lo denotamos $MH \cup HM \cup HH$. Ahora, usamos la regla de suma, que es lo que hemos estado usando informalmente en previas ocasiones para calcular probabilidades. Por ejemplo, para calcular la probabilidad de que un dado nos dé un número primo, sumamos la probabilidad de que dé 2, a la que dé 3 y la que dé 5. Formalmente, se dice:

Definición: Dos posibilidades, A y B son **mutuamente excluyentes** si no pueden ambos suceder al mismo tiempo. Formalmente, A y B son mutuamente excluyentes si $P(A \cap B) = 0$.

Regla de suma: si A y B son posibilidades mutuamente excluyentes, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Formalmente, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si es el caso que $P(A \cap B) = 0$

Usando la regla de suma en el caso del ejercicio de género, obtenemos probabilidad de $\frac{3}{4}$ de que al menos uno sea hombre: $P(MH \cup HM \cup HH) = \frac{3}{4}$.

Entonces: $P(HH|(MH \cup HM \cup HH)) = \frac{P(HH)}{P(MH \cup HM \cup HH)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$

Es importante notar que la definición de probabilidades condicionales también se puede usar para calcular probabilidades no condicionales, si se manipula un poco:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

Tablas de contingencias y de probabilidades

Muchas veces, vamos a calcular probabilidades de que una persona escogida al azar de un grupo dado tenga alguna característica. Por ejemplo, la probabilidad de que un estudiante de la UCR, escogido al azar, sea tico. Esto lo hacemos en base de información acerca de la población de la que se está hablando (e.j. cuántos estudiantes en la UCR son ticos y cuántos son extranjeros).

E.j. Suponiendo que hay 35000 estudiantes ticos y 4000 extranjeros, que es la probabilidad de que un estudiante escogido al azar sea tico? Hacemos el cálculo. Denotemos que sea tico con “T” y que sea extranjero con “E”. Entonces: $P(T) = \frac{35000}{35000+4000} = \frac{35}{39}$.

Ahora, supongamos que nos interesan también las edades de los estudiantes y que tenemos los siguientes datos:

25000 estudiantes ticos menores de 28 años (denotados $T \cap m$).

10000 estudiantes ticos de 28 años o mayores (denotados $T \cap M$).

2000 estudiantes extranjeros menores de 28 años (denotados $E \cap m$).

2000 estudiantes extranjeros de 28 años o mayores (denotados $E \cap M$).

Una manera común para resumir estos datos es en una **tabla de contingencias**. Se hace una variable (e.j. edad) en las filas y la otra (e.j. nacionalidad) en las columnas. Y adicionalmente se calcula los subtotales (e.j. los ticos, de cualquiera edad, son 35000) y el total.

	Ticos (T)	Extranjeros (E)	Total
Menores 28 (m)	25000	2000	27000
28 o mayores (M)	10000	2000	12000
Total	35000	4000	39000

Con ésta tabla podemos calcular probabilidades.

Por ejemplo, la probabilidad de que un estudiante escogido al azar sea un extranjero menor de 28 es $\frac{2000}{39000} = \frac{2}{39}$.

Si hacemos esto para cada posibilidad, nos resulta una tabla de probabilidades:

	Ticos (T)	Extranjeros (E)	Total
Menores 28 (m)	$\frac{25}{39}$	$\frac{2}{39}$	$\frac{27}{39}$
28 o mayores (M)	$\frac{10}{39}$	$\frac{2}{39}$	$\frac{12}{39}$
Total	$\frac{35}{39}$	$\frac{4}{39}$	1

Con cualquiera de estas tablas podemos calcular probabilidades condicionales.

E.j. la probabilidad de que un estudiante escogido al azar sea tico, dado que tiene 28 años o más es $P(T|M) = \frac{P(T \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{10}{39}}{\frac{12}{39}} = \frac{5}{6}$.

Sería más fácil calcularlo con la tabla de contingencias, si se recuerda que **las probabilidades son proporcionales a las frecuencias**. E.j. $P(T|M) = \frac{10000}{12000} = \frac{5}{6}$.

También podemos construir la tabla de contingencia si sabemos las probabilidades y el número total en la población.

Note que en este ejemplo la edad y la nacionalidad no son independientes una de la otra. Por ejemplo, no es la misma la probabilidad de que un estudiante sea menor de 28 dado que es extranjero a que un estudiante sea menor de 28 dado que es tico.

Práctica para la tarea

#P1. Calcule las siguientes probabilidades, en base de las tablas anteriores.

- (a) La probabilidad que un estudiante escogido al azar sea menor de 28 años.
- (b) La probabilidad que un estudiante escogido al azar sea tico, dado que es menor de 28 años.
- (c) La probabilidad que un estudiante escogido al azar sea menor de 28 años, dado que es tico.
- (d) La probabilidad que un estudiante escogido al azar sea un tico menor de 28 años o un extranjero.
- (e) La probabilidad que en un estudiante escogido al azar sea un extranjero menor de 28 años.

#P2. Suponga que la probabilidad de que llueva es $\frac{2}{3}$, y que ésta no depende del día de la semana que sea.

- (a) Construya una tabla de probabilidades en donde las filas representan si llueve o no, y las columnas representan si es domingo o no.
- (b) Calcule la probabilidad de que no llueva dado que no es domingo.

#P3. Suponga que hay dos casos principales: que llueva (probabilidad $\frac{2}{3}$) o que no. La probabilidad de que haya viento es $\frac{2}{3}$ si llueve y $\frac{1}{2}$ si no llueve (note que éstas son probabilidades condicionales). Construya una tabla de probabilidades, y utilícela para calcular las siguientes probabilidades:

- (a) La probabilidad de que haya lluvia pero no viento.
- (b) La probabilidad de que haya lluvia, dado que no hay viento.
- (c) La probabilidad de que haya viento.
- (d) La probabilidad de que no haya viento, dado que no hay lluvia.

Tarea para el miércoles.

#H1. Suponga que la probabilidad de que se caiga el cielo es $\frac{1}{4}$, que la probabilidad de que sea frío si se cae el cielo es $\frac{1}{3}$ y la probabilidad de que se frío si no se cae el cielo es $\frac{2}{3}$.

- (a) Construya una tabla de probabilidades para representar éste ejemplo. Asegúrese de completar todas las celdas de la tabla.
- (b) Construya un árbol de probabilidades para representar éste ejemplo. Asegúrese de incluir en su diagrama todas las probabilidades que resultan.
- (c) Calcule la probabilidad de que haga frío.
- (d) Calcule la probabilidad de que se cae el cielo, dado que no hace frío.
- (e) Calcule la probabilidad de que haga frío sin que se caiga el cielo o que no haga frío y si se caiga el cielo.

(Tarea continúa en la página siguiente)

#H2. Suponga que en una universidad hay 100 estudiantes de medicina, 150 de derecho, y 120 de teología, y que cada estudiante estudia solamente una de estas áreas. Suponga también que el porcentaje de los estudiantes que son mujeres en medicina es 40%, que en derecho es 60%, y que en teología es 75%.

- Construya una tabla de contingencias en base de estos datos.
- Calcule la probabilidad de que una estudiante mujer escogida al azar esté en teología.
- Calcule la probabilidad de que un estudiante de derecho escogido al azar sea hombre.
- Calcule la probabilidad de que un estudiante escogido al azar sea mujer.
- Calcule la probabilidad de que un estudiante hombre escogido al azar esté en medicina.

Soluciones para los ejercicios de práctica.

#P1. Calcule las siguientes probabilidades, en base de las tablas anteriores.

- La probabilidad que un estudiante escogido al azar sea menor de 28 años. $P(m) = \frac{27}{39}$
- La probabilidad que un estudiante escogido al azar sea tico, dado que es menor de 28 años. $P(T|m) = \frac{25}{27}$
- La probabilidad que un estudiante escogido al azar sea menor de 28 años, dado que es tico. $P(m|T) = \frac{25}{35}$
- La probabilidad que un estudiante escogido al azar sea un tico menor de 28 años o un extranjero. $P((T \cap m) \cup E) = \frac{25}{39} + \frac{4}{39} = \frac{29}{39}$
- La probabilidad que en un estudiante escogido al azar sea un extranjero menor de 28 años. $P(E \cap m) = \frac{2}{39}$

#P2. Suponga que la probabilidad de que llueva es $\frac{2}{3}$, y que ésta no depende del día de la semana que sea.

- Construya una tabla de probabilidades en donde las filas representan si llueve o no, y las columnas representan si es domingo o no.

	Domingo (D)	No domingo (N)	Total
Llueve (L)	$\frac{2}{21}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{3}$
No llueve (M)	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{3}$
Total	$\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$	1

- Calcule la probabilidad de que no llueva dado que no es domingo.

$$P(M|N) = \frac{P(M \cap N)}{P(N)} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{6}{7}} = \frac{1}{3}$$

#P3. Suponga que hay dos casos principales: que llueva (probabilidad $\frac{2}{3}$) o que no. La probabilidad de que haya viento es $\frac{2}{3}$ si llueve y $\frac{1}{2}$ si no llueve (note que éstas son probabilidades condicionales). Construya una tabla de probabilidades, y utilícela para calcular las siguientes probabilidades:

	Viento (V)	Sin viento (C)	Total
Lluvia (L)	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{3}$
Sin lluvia (N)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
Total	$\frac{11}{18}$	$\frac{7}{18}$	1

(a) La probabilidad de que haya lluvia pero no viento.

$$P(L \cap C) = \frac{2}{9}$$

(b) La probabilidad de que haya lluvia, dado que no hay viento.

$$P(L|C) = \frac{P(L \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{7}{18}} = \frac{4}{7}$$

(c) La probabilidad de que haya viento.

$$P(V) = \frac{11}{18}$$

(d) La probabilidad de que no haya viento, dado que no hay lluvia.

$$P(C|N) = \frac{P(C \cap N)}{P(N)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$